ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans ce problème, $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ désignent deux suites réelles et, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n et v_n les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad v_n(x) = b_n \sin(nx).$$

On rappelle que si f est une fonction réelle 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$, dites séries trigonométriques, et notamment celles liées à la continuité de la somme.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I. Résultats préliminaires

A- Un résultat de dérivation

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit x_0 un réel quelconque .

1. Écrire, pour $h > 0$, la formule de Taylor-Young, à l'ordre 2, appliquée à f entre x_0 et $x_0 + h$, puis entre x_0 et $x_0 - h$.
2. En déduire que $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} f''(x_0)$.
3. Que peut-on dire de f si f'' est nulle ?

Dans la suite du problème, on admet que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et vérifiant $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} 0$, pour tout réel x, alors f est une fonction **affine***.*

B- Un résultat de convergence

Dans cette section, on suppose que la suite de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

1. Si la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

   1-1. En utilisant un résultat du cours à préciser, montrer que la suite réelle $\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} v_n^2(x)\,dx\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

1-2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\pi b_n^2 = \int_0^{2\pi} b_n^2 \sin^2(nx)\, dx$ et en déduire que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. Dans le cas général, on pose $c_n = \min(1, |b_n|)$ et $w_n(x) = c_n \sin(nx), \quad (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

   2-1. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

   2-2. En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 puis justifier que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge elle aussi vers 0.

II. Série trigonométrique dont la somme est continue

On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme, notée f, est **continue**.

1. 1-1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers 0.

   1-2. Montrer alors que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

   1-3. Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et en déduire que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. 2-1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme, notée $-F$, est continue.

   2-2. Vérifier que F est 2π-périodique et calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

   3-1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   3-2. Montrer que la fonction φ' est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. Soit x un réel ; on pose $S_0(x) = 0$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n \geqslant 1$.

   4-1. Montrer, pour tout réel $h > 0$, la relation

$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)\varphi(nh).$$

   4-2. Montrer, pour tout réel $h > 0$, la relation

$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(S_n(x) - f(x)\big)\Big(\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)\Big).$$

   4-3. Soit $\varepsilon > 0$; on pose $A = \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\, dt$.

      i. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $|S_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2A}$ dès que $n \geqslant N$.

ii. En exprimant, pour $h > 0$ et $n \geqslant N$, la quantité $\Big(\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)\Big)$ sous forme d'une intégrale, prouver que

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\big(S_n(x) - f(x)\big)\Big(\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

iii. Montrer alors que $\quad \dfrac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} f(x).$

5. 5-1. Vérifier que la fonction $F_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer F_1''.

   5-2. En déduire, moyennant les résultats de la première section des préliminaires, que la fonction $(F - F_1)$ est affine et conclure que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer F''.

   5-3. Vérifier que f est 2π-périodique et exprimer ses coefficients de Fourier trigonométriques en fonction de ceux de F, puis en déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n(f) = a_n$ et $b_n(f) = b_n$.

III. Séries trigonométriques impaires

A- Une application de l'étude précédente

Dans cette section, on suppose que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$; on note alors f la fonction somme de cette série et on suppose de plus que f est **continue**.

1. Que peut-on alors dire de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{v_n}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme, notée ψ, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer ψ''.
3. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n^2+1}\sin(nx)$. Justifier que g est bien définie, puis en remarquant que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n^2}\sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n^2(n^2+1)}\sin(nx)$, montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\quad -g'' + g = f$.
4. Résoudre l'équation différentielle $-y'' + y = f$ et montrer que g est l'unique solution de cette équation qui s'annule en 0 et π.

B- Cas où la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ des coefficients est décroissante

Dans cette section, on suppose que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est **décroissante de limite nulle.**

1. Pour tout réel x, on pose $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ et $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   1-1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $A_n(x) + iB_n(x) = \dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}e^{ix}$, puis en déduire que

$$\frac{1}{2} + A_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad B_n(x) = \frac{\sin(n\frac{x}{2})\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

   1-2. Montrer alors que, pour tout réel x, la suite $\big(B_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

2. Soit x un réel.

   2-1. Montrer, pour tout entier $n > 1$, la relation
$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) = b_n B_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})B_k(x).$$

   2-2. Montrer que la série numérique $\sum_{p\geqslant 1}(b_p - b_{p+1})B_p(x)$ est absolument convergente.

   2-3. Déduire de ce qui précède que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et vérifier que sa somme, notée encore f, est une fonction impaire et 2π-périodique.

3. **Un exemple**
   On suppose uniquement dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n}$; l'étude précédente montre que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qu'on notera S et dont on sait déjà qu'elle est impaire et 2π-périodique. Soit $x \in]0, 2\pi[$.

   3-1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt.$

   3-2. Moyennant une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_x^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire l'expression de $S(x)$.

   3-3. Que vaut $S(0)$? La fonction S est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

4. **Une condition nécessaire de continuité**
   On reprend de nouveau les hypothèses de **III. B-** et on suppose que la fonction f définie à la question 2. précédente est de plus **continue**. On considère la fonction $G : \theta \longmapsto \displaystyle\int_0^\theta f(t)\,dt.$

   4-1. Montrer que G est paire et 2π-périodique.

   4-2. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire son développement limité en 0 à l'ordre 1.

   4-3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer le coefficient $a_n(G)$ en fonction de b_n. Que vaut $b_n(G)$?

   4-4. Que peut-on dire de mieux concernant le mode de convergence de la série de Fourier de la fonction G ? Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n}$ est convergente de somme $\frac{a_0(G)}{2}$.

   4-5. Soit k un entier $\geqslant 2$; on note $E(\frac{k}{2})$ la partie entière du réel $\frac{k}{2}$.

      i. Montrer que, pour tout $n \in \{E(\frac{k}{2})+1, \dots, k\},\ \cos(\frac{n\pi}{k}) \leqslant 0$, puis en déduire que
$$\sum_{n=E(\frac{k}{2})+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \geqslant \frac{b_k}{2}.$$

      ii. Exprimer $G(\frac{\pi}{k})$ comme somme d'une série et en déduire que $0 \leqslant \frac{b_k}{2} \leqslant G(\frac{\pi}{k})$ puis montrer que la suite $(nb_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Remarque : *On peut montrer, mais ce n'est pas demandé dans cette épreuve, que si la suite $(nb_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 alors la fonction f est continue.*

FIN DE L'ÉPREUVE